Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 23. Mai 2023 Besprechung: 05. Juni 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 6

Aufgabe 23

Seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(Y=0)=\frac{1}{4},\ P(Y=1)=\frac{3}{4}.$$

Betrachten Sie die Zufallsvariable $V = XY$. Berechnen Sie

(a) $P(V=0)$

(b) $P(V \geq 2)$

(c) $F_V(2)$, wobei F_V die Verteilungsfunktion von V ist.

Lösung: a) Weil $\sum_{i=1}^{3} P(X=i) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$

folgt direkt $P(X=0)=0$

$\Rightarrow P(V=0) = P(XY=0)$

$= P(X=0 \text{ oder } Y=0)$

Siebformel $= P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=0\} \cup \{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)=0\})$

$= P(X=0)+P(Y=0) - \underbrace{P(X=0, Y=0)}_{=P(X=0)\cdot P(Y=0),}$

da X, Y stoch. unabh.

$= 0 + \frac{1}{4} - 0\cdot\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}$

b) $P(V\geq 2) = 1-P(V<2) = 1-P(V\leq 1)$

$= 1-P(XY\leq 1)$

$$= 1 - \Big(P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=0)$$
$$+ P(X=1, Y=1)\Big)$$

stoch. unabh.

$$= 1 - \Big(P(X=1)\, P(Y=0) + P(X=2) \cdot P(Y=0) + P(X=3) \cdot P(Y=0)$$
$$+ P(X=1) \cdot P(Y=1)\Big)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $F_V(2) = P(V \leq 2) = P(XY \leq 2) = 1 - P(XY > 2)$

$$= 1 - P(X=3, Y=1)$$
$$\overset{\text{s.u.}}{=} 1 - P(X=3) \cdot P(Y=1)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 24

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_c(x,y) = \begin{cases} c(x+y+xy), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f_c ist nur für $c = \frac{1}{4}$ eine Dichtefunktion.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

(c) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

(d) Berechnen Sie $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$.

(e) Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$.

(f) Berechnen Sie $\text{Cor}(X, Y)$.

(g) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung: a) Im Fall $0<x<1$ und $0<y<2$ ist

$$f_c(x,y) = c\cdot(\underbrace{x}_{>0}+\underbrace{y}_{>0}+\underbrace{xy}_{\geq 0}) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$$

und im anderen Fall gilt $f_c(x,y) = 0 \geq 0$. Weiterhin ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 c(x+y+xy)\,dx\,dy$$

$$= c\int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= c\int_0^2\left(\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}y\right)dy$$

$$= c\int_0^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y\right)dy$$

$$= c\cdot\left[\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}y^2\right]_0^2 = c\cdot(1+3) = 4c \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$$

b) Randdichten

Für $x \in (0,1)$ ist

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{4}\cdot(x+y+xy)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{4}(2x + 2 + 2x)$$
$$= x + \frac{1}{2}$$

und für $x \notin (0,1)$ ist $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x,y)\,dy = \int 0\,dy = 0$

Für $y \in (0,2)$ ist

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(x + y + xy)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + y + \frac{1}{2}y\right) = \frac{3}{8}y + \frac{1}{8}$$

und für $y \notin (0,2)$ ist $f_Y(y) = 0$

c) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^2 y\left(\frac{3}{8}y + \frac{1}{8}\right)dy$$
$$= \left[\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{16}y^2\right]_0^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

d) <u>Verschiebungssatz</u>

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

Hierbei ist

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$
$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^2 y^2\left(\frac{3}{8}y + \frac{1}{8}\right)dy$$
$$= \left[\frac{3}{32}y^4 + \frac{1}{24}y^3\right]_0^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow \quad Var(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$Var(y) = \frac{11}{6} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{13}{48}$$

e) $Cov(X,y) = E(X \cdot y) - E(X) \cdot E(y)$

Hier ist

$$E(Xy) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_c(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 xy \tfrac{1}{4}(x+y+xy)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 y + xy^2 + x^2y^2\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3y^2\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{5}{18}y^3\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{20}{9}\right) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$\Rightarrow Cov(X,y) = \frac{13}{18} - \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{1}{144}$$

f) Korrelation:

$$Cor(X,y) = \frac{Cov(X,y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}} \cdot \sqrt{\frac{13}{48}}}$$

$$\approx -0{,}0483$$

g) Gemäß Vorlesung gilt:
Wenn X,y stoch. unab. sind, dann ist $Cov(X,y) = 0$
Die Umkehrung dieser Aussage ist:
Gilt $Cov(X,y) \neq 0$, dann sind X,y nicht stoch. unabh.
Nach e) ist $Cov(X,y) = -\frac{1}{144} \neq 0$
$\Rightarrow X,y$ nicht stoch. unabh.

Aufgabe 25

$\neq 0 \Rightarrow Y, Z$ nicht unabh.

Seien $Y \sim \text{Exp}(3)$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ mit $\text{Cov}(Y,Z) = 2$ gelte. Weiterhin betrachten wir den 3-dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$, dessen Komponenten durch

$$X_1 := 2Y + Z - 1, \quad X_2 := -Y \quad \text{und} \quad X_3 := 3Z$$

definiert sind. Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\mu_{\mathbf{X}}$ und die Kovarianzmatrix $\text{Cov}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$.

Lösung:

Da $Y \sim Exp(3)$ und $Z \sim N(0,1)$ gilt:

$$E(Y) = \frac{1}{3} \qquad Var(Y) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$E(Z) = 0 \qquad Var(Z) = 1$$

Erwartungswertvektor:

$$\underbrace{\mu_X = E(X)}_{\in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E(Y) + E(Z) - 1 \\ -E(Y) \\ 3E(Z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 - 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix

$$\underbrace{Cov(X)}_{\in \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & Cov(X_1,X_3) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & Cov(X_2,X_3) \\ Cov(X_3,X_1) & Cov(X_3,X_2) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$

Beachte: $Cov(Y,Z) \neq 0$ nach Vor.

$\Rightarrow Y, Z$ sind nicht stoch unabh.

$$Var(X_1) = Var(2Y + Z - 1) = Var(2Y + Z)$$

$$= Var(2Y) + Var(Z) + 2 \cdot Cov(2Y, Z)$$

$$= 4\,Var(Y) + Var(Z) + 2 \cdot 2 \cdot Cov(Y, Z)$$

$$= \frac{4}{9} + 1 + 8 = \frac{85}{9}$$

$$Var(X_2) = Var(-Y) = Var(Y) = \frac{1}{9}$$

$$\mathrm{Var}(X_3) = \mathrm{Var}(3Z) = 9\,\mathrm{Var}(Z) = 9$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(2Y + Z - 1, -Y)$$
$$= \mathrm{Cov}(2Y, -Y) + \mathrm{Cov}(Z, -Y)$$
$$= -2\,\underbrace{\mathrm{Cov}(Y, Y)}_{= \mathrm{Var}(Y)} - \underbrace{\mathrm{Cov}(Z, Y)}_{= \mathrm{Cov}(Y, Z) = 2}$$
$$= -\frac{2}{9} - 2 = -\frac{20}{9}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = \mathrm{Cov}(2Y + Z - 1, 3Z)$$
$$= \mathrm{Cov}(2Y, 3Z) + \mathrm{Cov}(Z, 3Z)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{Cov}(Y, Z) + 3 \cdot \mathrm{Var}(Z)$$
$$= 12 + 3 = 15$$

$$\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = \mathrm{Cov}(-Y, 3Z) = -3\,\underbrace{\mathrm{Cov}(Y, Z)}_{= 2} = -6$$

Wegen der Symmetrie der Kovarianz ist

$$\mathrm{Cov}(X) = \begin{pmatrix} 85/9 & -\frac{20}{9} & 15 \\ -\frac{20}{9} & 1/9 & -6 \\ 15 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ ein 2-dimensional normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $E(\mathbf{X}) = 0 \in \mathbb{R}^2$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin seien

$$Y_1 = aX_1 - X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = X_1 + 2X_2$$

für $a \in \mathbb{R}$. Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

Lösung:

Sei $v = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$$Y_1 = aX_1 - X_2 = v'X = (a \;\; -1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = X_1 + 2X_2 = w'X = (1 \;\; 2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Nach Vor. ist $X \sim N_2(0, \Sigma)$, daher folgt nach Vorlesung

$$Y_1 \sim N_1(v'0, v'\Sigma v) = N_1(0, v'\Sigma v)$$

$$Y_2 \sim N_1(w'0, w'\Sigma w) = N_1(0, w'\Sigma w)$$

Hier ist:

$$v'\Sigma v = (a \;\; -1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (a \;\; -1) \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a - 1 \end{pmatrix} = a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + 1$$

$$= a^2 - a + 1$$

und

$$w'\Sigma w = (1 \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \;\; 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = 2 + 5 = 7$$

Da Y_1 und Y_2 normalverteilt sind, sind Y_1, Y_2 genau dann stoch. unabhängig, wenn $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$

(gilt nur bei Normalverteilung!)

Hier ist

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(aX_1 - X_2, X_1 + 2X_2)$$

$$= a\,Cov(X_1, X_1) + 2a\,Cov(X_1, X_2)$$
$$- Cov(X_2, X_1) - 2\,Cov(X_2, X_2)$$
$$= a\,Var(X_1) + 2a\,Cov(X_1, X_2) - Cov(X_1, X_2)$$
$$- 2\,Var(X_2)$$
$$= a + a - \frac{1}{2} - 2 = 2a - \frac{5}{2}$$

Also $Cov(Y_1, Y_2) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2a - \frac{5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$$

Kovarianz berechnen reicht allgemein nur aus um stoch. Abhängigkeit zu zeigen! (siehe A24, (g))

Nur wenn beide Zufallsvariablen jeweils normalverteilt sind, folgt aus Kovarianz = 0 die stoch. Unabhängigkeit!