Prof. Dr. A. Steland
N. Mause

RWTH Aachen, SS2023

Ausgabe: 06. Juni 2023 Besprechung: 12. Juni 2023

Einführung in die angewandte Stochastik

Übungsblatt 7

Für die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Übungsblatt benötigen Sie die Tabelle mit Funktionswerten der Standardnormalverteilung, die Sie am Ende des Übungsblattes finden können.

Aufgabe 27

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$. Außerdem seien $Y_1, \dots, Y_n$ weitere unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\nu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\tau^2 > 0$, die zusätzlich von $X_1, X_2, \dots$ stochastisch unabhängig seien. Alle vorkommenden Zufallsvariablen seien auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert.

Wir möchten in dieser Aufgabe für beliebiges $\epsilon > 0$ den Grenzwert

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_i \le n(\mu - \nu) + n\epsilon + \sum_{i=1}^n Y_i\right)$$

berechnen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Definieren Sie Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n$ durch $Z_i = X_i - Y_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Bestimmen Sie $E(Z_i)$ und $\mathrm{Var}(Z_i)$.

(b) Sei nun $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Berechnen Sie $E(S_n)$.

(c) Schätzen Sie $(*)$ geeignet nach unten ab und verwenden Sie ein aus der Vorlesung bekanntes Gesetz.

Aufgabe 28

Im Allgemeinen kann eine (unbekannte) Verteilungsfunktion F durch die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \le x\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

auf Basis von $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ geschätzt werden.

(a) Im Rahmen einer statistischen Untersuchung wurden die folgenden Beobachtungswerte ermittelt:

$$3.8\,,\ 2.3\,,\ 1.3\,,\ 1.7\,,\ 1.6\,,\ 2.1\,,\ -0.2\,,\ 0.8\ .$$

Diese Daten können aufgefasst werden als Realisationen $x_1, \dots, x_8$ stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_8$ mit unbekannter Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie aus den gegebenen Beobachtungen einen Schätzwert für $F(2)$.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie $E(F_n(x))$ und $\mathrm{Var}(F_n(x))$. Was passiert für $n \to \infty$?

Aufgabe 29

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, standard-exponentialverteilte Zufallsvariablen $X_i \sim \mathrm{Exp}(1), i = 1, \ldots, n$. Definiere nun $Z_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$. Zeigen Sie, dass $Z_n \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$. D.h. zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$P(|Z_n| > \epsilon) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Aufgabe 30

Eine Bank betreibt in einer Region insgesamt 200 Geldautomaten, von denen jeder (unabhängig von den übrigen Automaten) mit Wahrscheinlichkeit 0.05 aufgrund einer Störung innerhalb einer Woche mindestens einmal ausfällt. Für die Einrichtung eines ständigen Wartungsdienstes ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, dass die Anzahl der Geldautomaten, die in einer Woche mindestens eine derartige Störung aufweisen, mindestens 5 und höchstens 15 beträgt.

(a) Schätzen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels der Tschebyscheff–Ungleichung nach unten ab.

(b) Berechnen Sie nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Verteilungsfunktion $\Phi(x+h)$										
x	h									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981

Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(3{,}9)$,

$$P(X \leq 4.26) = P(\tfrac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \tfrac{4.26-3}{3}) = P(X \leq 0.42) = 0.6628$$

Abbildung 1: Tabelle zur Standardnormalverteilung aus dem Buch „Basiswissen Statistik“ von Prof. Dr. A. Steland